Analiza Funkcjonalna
WPPT IIIr. semestr letni 2011
WYKŁAD 9,5: ZBIEŻNOŚĆ SŁABA I *-SŁABA
TWIERDZENIE BANACHA–ALAOGLU

28/05/2013

Niech X oznacza przestrzeń Banacha, a X^* jej dualną (czyli przestrzeń funkcjonałów ograniczonych na X z normą funkcjonałową).

Definicja 1. Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ elementów X *zbiega słabo* do elementu $x \in X$, jeśli dla każdego funkcjonału $f \in X^*$ zachodzi zbieżność

$$f(x_n) \to f(x).$$

Podobnie, powiemy, że ciąg funkcjonałów (f_n) (czyli elementów X^*) *zbiega *-słabo* do funkcjonału $f \in X^*$ jeśli dla dowolnego $x \in X$ zachodzi zbieżność

$$f_n(x) \to f(x).$$

Twierdzenie 1. Jeśli $x_n \to x$ w normie X, to $x_n \to x$ słabo. Jeśli $f_n \to f$ w normie X^*, to $f_n \to f$ słabo (to znaczy po nałożeniu dowolnego funkcjonału $F \in X^{**}$). Jeśli $f_n \to f$ słabo, to $f_n \to f$ *-słabo.

Dowód: Pierwszy fakt wynika wporst z ciągłości każdego $f \in X^*$ względem normy w X. Drugi fakt jest zastosowaniem pierwszego do przestrzeni X^*. Trzeci fakt wynika z tego, że przy ustalonym x przyporządkowanie $f \mapsto f(x)$ jest funkcjonałem ograniczonym na X^* (a więc elementem X^{**}). $\square$

Twierdzenie 2. Granica słaba ciągu $(x_n)_{n\geq 1}$ elementów X, o ile istnieje, to jest jedyna. Podobnie granica *-słaba ciągu $(f_n)_{n\geq 1}$ elementów X^*, o ile istnieje, to jest jedyna.

Dowód na ćwiczeniach.

Uwaga. Jeśli X jest przestrzenią refleksywną (tzn. $X \approx X^{**}$), to w X można rozważać zarówno zbieżność słabą jak i *-słabą (taktując X jako sprzężoną do X^*). Wtedy zbieżności te są tożsame, gdyż w obu przypadkach w definicji zbieżności ciągu (x_n) odwołujemy się do ciągów liczbowych $f(x_n)$, gdzie $f \in X^*$.

Twierdzenie 3. Ciąg elementów X zbieżny słabo jest ograniczony w normie. Podobnie, ciąg funkcjonałów zbieżny *-słabo jest oraniczony w normie funkcjonałowej.

Dowód: Niech ciąg (x_n) zbiega słabo (do jakiegoś $x \in X$, który jednak nie odegra żadnej roli w dowodzie). Załóżmy, że ciąg $\|x_n\|$ jest nieograniczony. Wtedy, przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\|x_n\| \geq n4^n$. Napiszmy $\|x_n\| = C_n n4^n$, gdzie $C_n \geq 1$. Niech f_n oznacza funkcjonał unormowany wyciągający normę x_n (tzn. taki, że $\|f\| = 1$ oraz $f_n(x_n) = \|x_n\| = C_n n4^n$; istnienie takiego funkcjonału wynika z Twierdzenia Hahna–Banacha). Zauważmy, że dla dowolnego ciągu ξ_n składającego się z zer i jedynek, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{f_n}{4^n}$$

jest bezwzględnie zbieżny, zatem z zupełności X^* zbieżny do jakiegoś funkcjonału $f \in X^*$. Dobierzemy teraz indukcyjnie ciąg ξ_n, tak aby uzyskać sprzeczność. Najpierw kładziemy $\xi_1 = 1$. Załóżmy, że dla pewnego n już ustaliliśmy wartości $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Patrzymy na moduł

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right|.$$

Jeśli to jest większe bądź równe $C_n \frac{n}{2}$ to kładziemy $\xi_n = 0$. W przypadku przeciwnym kładziemy $\xi_n = 1$. Zauważmy, że w pierwszym przypadku mamy oczywiście

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \geq C_n \frac{n}{2}.$$

W drugim zaś piszemy

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \geq \left| \frac{f_n(x_n)}{4^n} \right| - \left| \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \geq C_n n - C_n \frac{n}{2} = C_n \frac{n}{2}.$$

i wyszła taka sama nierówność jak w przypadku pierwszym. W ten sposób zdefiniowaliśmy liczby ξ_n, tak że po pierwsze $f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{f_n}{4^n}$ jest funkcjonałem ciągłym, a po drugie, dla każdego n zachodzi

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \geq C_n \frac{n}{2}.$$

Dalej zauważmy, że ponieważ wszystkie funkcjonały f_k mają normę 1, to mamy

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{4^k} = \|x_n\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \|x\| \frac{1}{3 \cdot 4^n} = C_n \frac{n}{3}.$$

Zatem

$$|f(x_n)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \frac{f_k(x_n)}{4^k} \right| \geq C_n \frac{n}{2} - C_n \frac{n}{3} = C_n \frac{n}{6} \geq \frac{n}{6}.$$

Ponieważ uzyskaliśmy ciąg nieograniczony, więc ciąg $f(x_n)$ nie może zbiegać do $f(x)$ (co jest liczbą skończoną). Ta sprzeczość dowodzi, że ciąg $\|x_n\|$ na początku dowodu musi być ograniczony.

Dowód dla ciągu funkcjonałów zbieżnego *-słabo jest symetryczny (to znaczy zamieniamy rolami punkty i fukcjonały). Jedyna różnica, to taka, że nie musi istnieć element x_n o normie 1 ,,wyciągający normę" funkcjonału f_n (to znaczy elementu, na którym funkcjonał ten osiąga normę). Ale istnieje element x_n, na którym f_n ,,prawie" osiąga normę, na przykład taki, że $f_n(x_n) = 0,9 \cdot \|f_n\| = 0,9 \cdot C_n n 4^n$. Na końcu wyjdzie punkt x, taki że $|f_n(x)| \geq 0,9 \cdot C_n \frac{n}{6} \geq 0,9 \cdot \frac{n}{6}$. To też jest ciąg nieograniczony. Reszta dowodu bez istotnych zmian. $\square$

Twierdzenie 4.
1) Niech $\{f_l : l \geq 1\}$ będzie zbiorem liniowo gęstym w X^*. Ciąg (x_n) elementów przestrzeni X zbiega słabo do $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on ograniczony w normie oraz $f_l(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} f_l(x)$ dla każdego $l \geq 1$.

2) Niech $\{x_l : l \geq 1\}$ będzie zbiorem liniowo gęstym w X. Ciąg f_n funkcjonałów ciągłych na X zbiega *-słabo (do pewnego $f \in X^*$) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on ograniczony (w normie funkcjonałowej) oraz dla każdego $l \geq 1$ ciąg liczbowy $(f_n(x_l))_{n\geq 1}$ jest zbieżny. (Uwaga, w tym sformułowaniu nie wskazujemy granicznego funkcjonału f. W dowodzie trzeba go będzie dopiero ,,stworzyć").

Dowód: Jeśli $x_n \xrightarrow[n]{\text{słabo}} x$, to już wiemy, że ciąg (x_n) jest ograniczony i zachodzi zbieżność $f(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ dla dowolnego funkcjonału f, w szczególności dla f_l $(l \geq 1)$. Podobny argument załatwia jedną implikację dla ciągu *-słabej zbieżności funkcjonałów.

W drugą stronę (dla zbieżności słabej jak w punkcie 1)). Ustalmy dowolny $f \in X^*$ i $\epsilon > 0$. Istnieje kombinacja liniowa $f_\epsilon = \sum_{l=1}^k a_l f_l$ bliska f o $\frac{\epsilon}{M}$ w normie funkcjonałowej, gdzie M jest wspólnym ograniczeniem norm wszystkich elementów x_n i x. Wtedy, dla każdego n mamy $|f(x_n) - f_\epsilon(x_n)| \leq \epsilon$ oraz $|f(x) - f_\epsilon(x)| \leq \epsilon$. Ponadto mamy zbieżność $f_\epsilon(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} f_\epsilon(x)$, zatem dla dostatecznie dużego n, $|f_\epsilon(x_n) - f_\epsilon(x)| < \epsilon$. Z warunku trójkąta, mamy więc (dla dostatecznie dużego n), $|f(x_n) - f(x)| < 3\epsilon$, co dowodzi zbieżności $f(x_n)$ do $f(x)$, czyli słabej zbieżności x_n do x.

Dowiedziemy teraz drugiej implikacji w punkcie 2). Po pierwsze pokażemy, że dla dowolnego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n\geq 1}$ jest zbieżny. Do tego wystarczy jego podstawowość. Ustalmy $\epsilon > 0$. Przybliżamy x kombinacją liniową $x_\epsilon = \sum_{l=1}^k c_l x_l$ z dokładnością do $\frac{\epsilon}{M}$, gdzie M jest ograniczeniem na normy funkcjonałów f_n. Ponieważ dla każdego l ciąg $f_n(x_l)$ jest podstawowy, przeto istnieje ,,wspólne" (dla $l = 1, \ldots, k$) progowe n_0, że dla dowolnych $m, n \geq n_0$ zachodzi $|f_n(x_l) - f_m(x_l)| < \frac{\epsilon}{kc_l}$ $(l = 1, \ldots, k)$. Wtedy $|f_n(x_\epsilon) - f_m(x_\epsilon)| < \epsilon$. Ostatecznie, dla takich m, n mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_\epsilon)| + |f_n(x_\epsilon) - f_m(x_\epsilon)| + |f_m(x_\epsilon) - f_m(x)| \leq 3\epsilon,$$

co kończy dowód podstawowości. Możemy teraz zdefiniować funkcję f (za chwilę pokażemy, że jest to funkcjonał ograniczony) na całej przestrzeni X jako granicę punktową

$$f(x) = \lim_n f_n(x).$$

Liniowść f jest oczywista, gdyż każdy f_n jest liniowy, co zostaje zachowane przy przejściu do granicy. Ograniczoność f jest również oczywista, gdyż dla x o normie nie przekraczającej 1 wszytskie liczby $f_n(x)$ nie przekraczają co do modułu M, zatem i $|f(x)|$ nie przekracza M, innymi słowy f jest funkcjonałem ograniczonym o normie co najwyżej M. W ten sposób pokazaliśmy, że $f \in X^*$ i ciąg $(f_n)_{n\geq 1}$ zbiega *-słabo do f. $\square$

Uwaga: W dowodzie tej trudniejszej implikacji założenie ograniczoności jest istotne. Za chwilę podamy na to przykład.

Przykład. Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Jako że jest to przestrzeń refleksywna, zbieżności słaba i *-słaba są tożsame. Niech $\{e_k : k \geq 1\}$ oznacza bazę ortonormalną w H. Oczywiście odpowiadające im funkcjonały $f_k(x) = \langle x, e_k\rangle$ stanowią bazę ortonormalną (a więc zbiór liniowo gęsty) w H^*, zatem zgodnie z Twierdzeniem 4, zbieżność słaba ciągu (x_n) do x jest równoważna z koniungcją dwóch warunków: ograniczoności w normie, oraz tego, by dla każdego k zachodziła zbieżność $\langle x_n, e_k\rangle \underset{n}{\to} \langle x, e_k\rangle$. Ten ostatni warunek, to nic innego, jak wymóg, aby k-ty współczynnik Fouriera elementu x_n zbiegał po n do k-tego współczynnika Fouriera elementu x (czyli aby ciągi współczynników Fouriera elementów x_n zbiegały po współrzędnych do ciągu współczynników Fouriera elementu x).
Teraz pokażemy, że jest to zbieżność istotnie słabsza od zbieżności normowej. Mianowicie sama baza traktowana jako ciąg $(e_n)_{n\geq 1}$ oczywiście nie jest zbieżna w normie (a już na pewno nie do zera – są to elementy o normie 1). Z drugiej strony jest to ciąg ograniczony w normie i dla każdego k $k-te$ współczynniki Fouriera elementów e_n dążą po n do zera (są one zerami dla $n > k$), a więc do k-tego współczynnika Fouriera elementu zerowego przestrzeni H. Zatem ciąg (e_n) dąży słabo do zera.

Przy okazji, jeśli teraz weźmiemy ciąg $x_n = ne_n$, to tu również dla każdego k $k-te$ współczynniki Fouriera elementów x_n dążą po n do zera (są zerami dla $n > k$). Jednak ciąg (x_n) nie jest ograniczony w normie, a więc nie może być zbieżny słabo! Funkcjonału przeczącego zbieżności słabej trzeba jednak szukać poza bazą (czyli poza zbiorem funkcjonałów $\langle\cdot, e_k\rangle$), zgodnie z przepisem z dowodu Twierdzenia 3.

Twierdzenie 5 (Banach–Alaoglu). Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Wtedy kula jednostkowa w przestrzeni X^* jest *-słabo zwarta.

Dowód: Niech (f_n) będzie dowolnym ciągiem funkcjonałów o normie nie przekraczającej 1 na X. Naszym celem jest wybór podciągu zbieżnego *-słabo. Ponieważ ciąg (f_n) jest ograniczony, więc na mocy Twierdzenia 4, do *-słabej zbieżności podciągu wystarczy jego zbieżność na zbiorze liniowo gęstym w X. Ponieważ X jest ośrodkowa, istnieje gęsty (tym bardziej liniowo gęsty) zbiór przeliczalny $\{x_l : l \geq 1\}$. Konstrukja podciągu zbieżnego funkcjonałów będzie przebiegać zgodnie ze standardową procedurą przekątniową: Patrzymy na ciąg $(f_n(x_1))_{n\geq 1}$. Jest to ciąg liczbowy ograniczony (moduły nie przekraczają $\|x_1\|$), więc istnieje podciąg zbieżny $(f_{n_k}(x_1))_{k\geq 1}$. A więc ,,pierwszy podciąg" funkcjonałów $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ jest zbieżny w punkcie x_1. Funkcjonał f_{n_1} ,,odkładamy na bok" — to będzie pierwszy element naszego ostatecznego przekątniowego podciągu zbieżnego *-słabo. Teraz patrzymy na ciąg liczbowy $(f_{n_k}(x_2))_{k\geq 2}$. Znów istnieje jego podciąg zbieżny $(f_{n_{k_j}}(x_2))_{j\geq 1}$. A więc ,,drugi podciąg" funkcjonałów $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ jest zbieżny w punkcie x_2. Jest on również zbieżny w punkcie x_1, gdyż jest to podciąg „pierwszego podciągu" $(f_{n_k})_{k\geq 1}$. Funkcjonał $f_{n_{k_1}}$ „odkładamy na bok" jako drugi element naszego przekątniowego podciągu i patrzymy na ciąg liczbowy $(f_{n_{k_j}}(x_3))_{j\geq 2}$. I tak dalej, indukcyjnie. W ten sposób dla każdego l wybierzemy „l-ty podciąg funkcjonałów" zbieżny we wszystkich punktach $x_1, x_2, \ldots, x_l$ oraz „odłożony" zostanie podciąg przekątniowy funkcjonałów $f_{n_1}, f_{n_{k_1}}, f_{n_{k_{j_1}}}, \ldots$. Ma on następujące własności: Po pierwsze, indeksy tworzą ciąg rosnący, a więc jest to rzeczywiście podciąg ciągu (f_n). Od teraz oznaczać go będziemy jako $(f_{n_s})_{s\geq 1}$. Po drugie, dla dowolnej liczby naturalnej l, od miejsca $s = l$ nasz podciąg (f_{n_s}) jest zawarty w "l-tym podciągu" zbieżnym w punktach $x_1, x_2, \ldots, x_l$. W efekcie nasz podciąg przekątniowy jest zbieżny w każdym punkcie x_l $(l \geq 1)$. To, na mocy Twierdzenia 4 (punkt 2)) wystarcza do jego *-słabej zbieżności do pewnego funkcjonału ograniczonego. $\square$

Tomasz Downarowicz